

# ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA CON DOBLADO DE PAPEL.

**Matemáticas**

**M.C. Francisco Alarcón Ahumada**

***Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo***

**(443) 3120462** (Trabajo)

**(443) 2273969** (Celular)

**francisco.aahumada18@gmail.com**

## **JUSTIFICACIÓN.**

Con este taller se pretende proveer a los docentes de herramientas didácticas y lúdicas que les permitan desarrollar la geometría de una forma más atractiva y divertida buscando superar esa apatía y aversión que muestran algunos hacia esta área de las matemáticas.

Pretendiendo que las clases sean más participativas y productivas para lograr se mejore la calidad de la educación matemática, sean competentes en la escuela y en su contexto diario, se propone el presente taller teórico-práctico para conseguir lo anterior recurriendo a la papiroflexia como herramienta didáctica en el aula que además de mejorar el ambiente de aprendizaje, evitará que los conceptos aprendidos no se queden únicamente en la memoria, sino que trascienda a su realidad inmediata.

En virtud de la problemática que en general presenta la enseñanza de la **Geometría Euclidiana**, y en particular en el bachillerato de la *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*, se hace una propuesta metodológica que ayude en cierta medida a solucionar esta problemática; dicha propuesta consiste en el diseño de secuencias didácticas a base de doblado de papel que abarquen el contenido geométrico del curso de Matemáticas II del Bachillerato Nicolaita y le permitan al estudiante pasar de lo concreto a lo formal de manera más sencilla y amigable.

Para destacar el sentido lúdico de la propuesta de este taller, recurramos a Platón en *Epinomis*:

"Obligemos por una ley a los ciudadanos a que aprendan de estas ciencias lo que los niños de Egipto aprenden todos sin distinción a la par de las primeras letras. Se comenzará por hacer que se ejerciten, **jugando**, en los pequeños cálculos inventados por los niños, y que consisten en repartir con igualdad, tan pronto entre muchos como entre pocos de sus camaradas, un cierto número de manzanas o de coronas; ya en

distribuir sucesivamente y por medio de la suerte, en sus ejercicios de lucha y de pugilato, los papeles de luchador par e impar; ya en mezclar ampollitas de oro, de plata, de bronce y de otras materias semejantes, distribuyéndolas como dije antes, de suerte, que al mismo tiempo que se les divierte, se les obligue a recurrir a la ciencia de los números. Estos pasatiempos los pondrán en lo sucesivo en estado de dividir un campo, conducir y poner un ejército en buen orden, y administrar bien sus negocios domésticos; y en general, producirán el efecto de que el hombre se hará completamente diferente de lo que era con relación a la sagacidad del espíritu y al provecho que puede sacar de sus talentos; además de librarse de esta ignorancia ridícula y vergonzosa, en que nacen los hombres en lo relativo a la medida de los cuerpos, según su longitud, latitud y profundidad."

La idea central en el diseño de las actividades es precisamente que la solución de un problema con papel plegado genere en los estudiantes ideas para resolver otros problemas. Según Polya, un estudiante adolescente y con habilidad estándar puede resolver un problema matemático en el nivel científico; si el profesor diseña buenos problemas, el estudiante puede después de un tiempo, resolver un problema de construcción geométrica o inventar su propia demostración de un teorema.

Algunos procesos geométricos importantes pueden efectuarse más fácilmente con plegado de papel que con regla y compás, los únicos instrumentos tradicionalmente permitidos en la Geometría Euclidiana; por ejemplo, dividir líneas rectas y ángulos en dos o más partes iguales, trazar perpendiculares y paralelas, construir polígonos regulares, ó analizar propiedades del círculo.

Las secuencias didácticas no deben consistir meramente de trazados de figuras geométricas involucrando líneas en la forma ordinaria y hacer dobleces y cortes sobre ellas, requieren de una aplicación inteligente de los procesos simples peculiarmente adaptados el plegado y recorte de papel. Este será el principio fundamental de esta propuesta.

El uso de las técnicas preescolares de recorte y plegado de papel no sólo permite ocupar la atención de los jóvenes, sino que también prepara sus mentes para la apreciación de las ciencias. A la inversa, la enseñanza de las ciencias después podría hacerse interesante y basarla sobre fundamentos propios por referencias de las técnicas preescolares. Este es particularmente el caso de la Geometría, la cual forma las bases de todas las ciencias. La enseñanza de la Geometría puede hacerse muy interesante con el libre uso de tales técnicas. Será perfectamente legítimo pedirle a los alumnos que hagan los diagramas con papel. Podrán obtener figuras elegantes y precisas; y grabar en sus mentes la verdad de las proposiciones de manera contundente. Podría no ser necesario tomar como verdadera cualquier afirmación. Pero lo que ahora realiza por imaginación e idealización de figuras puede ser visto en concreto.

En vez de simplemente memorizar reglas y definiciones, los estudiantes desempeñan

construcciones, miden las figuras, observan modelos, discuten sus hallazgos para descubrir las ideas geométricas, escriben sus propias definiciones y formulan sus propias conjeturas geométricas.

Las secuencias se desarrollan apoyadas en los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1989) y a la vez se investiga sobre el modelo de *van Hiele* del pensamiento geométrico. El modelo de *van Hiele* provee las herramientas necesarias para diseñar las actividades en función del tiempo que los estudiantes necesitan para desarrollar y comprender conceptos geométricos, que necesitan para el descubrimiento de los conceptos y puedan aceptarlos de manera natural y no como una imposición, y puedan probar teoremas de Geometría al nivel en que comprendan la base conceptual de tales teoremas. Todo esto dentro del enfoque cooperativo para aprender Geometría que ambiciosamente proponen los estándares (NCTM, 1989).

Un objetivo primario de los materiales desarrollados en este trabajo es proporcionar, para los cursos de Geometría, guías que lleven a los estudiantes a descubrir y a dominar los conceptos y las relaciones antes que sean introducidos a demostraciones formales. Los estudiantes comienzan el curso creando sus propios trabajos de arte geométrico y desarrollando la visualización, adquiriendo las habilidades heurísticas necesarias para resolver problemas. Entonces aplican el razonamiento deductivo al tiempo que desempeñan las investigaciones, buscan modelos y hacen conjeturas. Ellos aprenden a seguir fluidamente las demostraciones, construyendo sus habilidades de lógica y razonamiento. Con el tiempo alcanzarán dominio sobre las demostraciones, comprenderán la pertinencia de una demostración y estarán más que listos para el desafío de formular sus propias demostraciones.

***El uso del doblado de papel moderniza muchos resultados que antes dependían de engorrosa construcciones con regla y compás.***

Antes de iniciar la experiencia con las secuencias desarrolladas, los alumnos presentaron un test cuyo objetivo era determinar su ubicación en el modelo de van Hiele. De los 42 alumnos del grupo, 36 cubrían aproximadamente el 40% del nivel 2, 4 aproximadamente el 90%, y los dos restantes presentaban indicios de estar en el umbral del nivel tres.

En el diseño del test se usaron (las actividades propuestas por **M. L. Crowley**).

Durante el desarrollo de las secuencias didácticas en el aula se pudo notar un alto grado de entusiasmo por parte de los alumnos. Comprobamos que es posible trabajar en geometría de una manera creativa y amena. Se notaron avances en los niveles de pensamiento geométrico que propone el modelo de *van Hiele*.

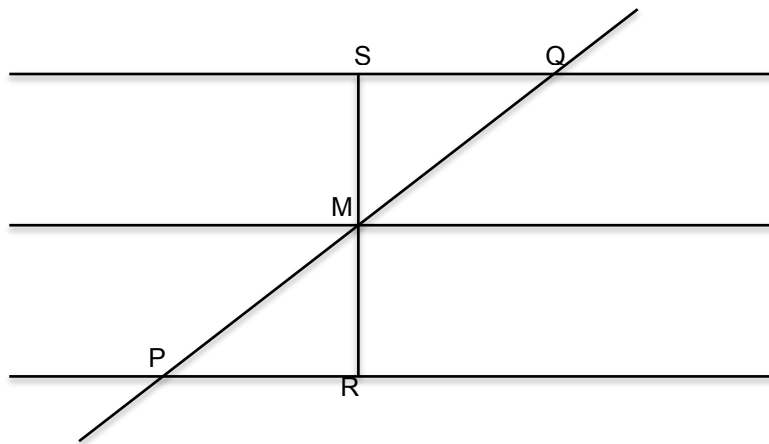
Entre los hechos más significativos que se tuvieron en esta experiencia destacan los siguientes.

- Cuando se definían o ilustraban conceptos o propiedades la mayoría de los alumnos

participaron con entusiasmo debido a que podían comprobar cada concepto en sus hojas de papel de manera tangible.

- Relevante, sin duda, es el hecho de que los alumnos se interesaran en resolver los problemas de construcción, sin tener instrucciones previas. En la mayoría de los casos se dio un ambiente de cooperación entre ellos, pero quizás lo más sorprendente fue que se escuchaban todas las propuestas de solución.

- Pero sobre todo, lo más importante en cuanto a resultados, posiblemente sea el hecho de que el 69% (29 de 42) de los alumnos pudieran llegar a argumentar en algunas demostraciones más allá de la prueba visual. Un ejemplo de esto es el siguiente: En la proposición 9 –*Los ángulos alternos internos son iguales*–, después de haber obtenido la prueba visual por medio del doblado de papel, los alumnos desdoblaron su hoja, la analizaron e hicieron argumentos como los que se presentan a continuación.



Sea  $M$  el punto medio de  $\overline{PQ}$ , sea  $\overline{SR}$  la perpendicular a las paralelas que pasa por  $M$  de quien también es punto medio. Entonces  $\overline{PM} = \overline{QM}$ ,  $\overline{MR} = \overline{MS}$  (distancia entre paralelas) y  $\angle PMR = \angle QMS$  (opuestos por el vértice).

Por lo anterior,  $\triangle PMR = \triangle QMS$  (Criterio lado, ángulo, lado) en consecuencia  $\angle RPM = \angle SQM$  (Partes correspondientes de triángulos congruentes), lo que se quería demostrar.

A partir de esto, pudieron probar que los ángulos correspondientes son iguales y que los ángulos alternos externos también son iguales.

Resultados como los anteriores nos permiten afirmar que es posible desarrollar en los estudiantes actitudes y destrezas para hacer deducciones informales, aunque en algunos casos se presentaron tintes de formalidad en sus deducciones. Por lo que se concluye que los estudiantes lograron en su mayoría el nivel 3 del modelo de *van Hiele* con algunos elementos del nivel 4.

## **ACERCA DE LA ACCIÓN EN EL APRENDIZAJE.**

### **a) Perspectiva Piagetiana.**

Se trata aquí de abordar la acción desde el punto de vista individual; en ese sentido se puede afirmar que la acción individual se esclarece en la medida en que se comprenda el sentido de la acción piagetiana. Este es una acción funcional, es decir, una acción mental interiorizada que se compone de un aspecto figurativo (representación, imitación, percepción, imagen mental), el cual es de carácter estático y del aspecto operativo, de carácter dinámico, que procesa, incorpora e identifica contenidos.

Conocer un objeto o evento es actuar sobre él, es modificarlo, transformarlo, comprender el proceso de esta transformación y, en consecuencia, entender cómo es construido. Esta acción mental permite la apropiación de las estructuras de transformación y por lo tanto, del conocimiento en cuestión.

Las relaciones que se establecen entre los elementos que se conservan, determinan la estructura; por otra parte, al operar estos elementos, al reconocer su lógica, se pueden determinar las reglas pertinentes que permiten moverse dentro de esta estructura; en otras palabras, reconocer sus bordes y el campo interior donde son válidas. La movilidad de las acciones goza de las propiedades de composición, asociatividad y reversibilidad, que permiten la comprensión por parte del sujeto.

### **b) Perspectiva Soviética.**

Desde este punto de vista, la enseñanza tiene carácter activo; las acciones perceptivas permiten la exploración y modelación de las propiedades del objeto percibido y posibilitan la obtención de copias e imágenes de dichos objetos. Las acciones con las cosas hacen posible el conocimiento sobre las cosas, pero además las acciones con las cosas desarrollan capacidades, las cuales debidamente ejercitadas, producen hábitos.

El papel protagónico y activo del alumno en la estructura de relaciones de la escuela permite el desarrollo armónico de su personalidad. La actividad escolar, pedagógicamente planeada y estructurada, debe conducir a la apropiación y expresión de la misma, como producto subjetivo, lo cual significa cambios cualitativos en la psiquis del alumno, en su desarrollo mental y moral. Esta perspectiva desplaza en énfasis, de los contenidos, a la transformación del propio sujeto, mediada por las acciones que realiza con los objetos. Sin embargo, no cualquier actividad garantiza la transformación del sujeto: debe ser una actividad que posibilite el surgimiento de relaciones nuevas, del sujeto hacia el objeto de estudio, hacia sí mismo y hacia las otras personas.

Por la importancia que tiene en los procesos de construcción del conocimiento, la acción merece atención especial. Aquí solamente se mencionarán algunas de sus características.

*Forma:* Grado de apropiación de las acciones; puede ser material o materializada, perceptiva, verbal externa y mental.

*Carácter Generalizado:* Es la medida de separación de las propiedades del objeto, esenciales para el cumplimiento de la acción, de otras no esenciales.

*Carácter Desplegado:* Muestra si todas las operaciones, que originariamente formaban parte de la acción, se cumplen.

*Carácter Asimilado:* Se refiere a la facilidad del cumplimiento de la acción, al grado de automatización y a la rapidez de su cumplimiento.

Es necesario tener claro lo siguiente: el objeto de la acción no es el material empírico con el que se trabaja, **el objeto de la acción es el conjunto de propiedades al que está dirigida la acción, el cual se puede representar en forma material o materializada.**

## **CRONOGRAMA.**

- Presentación, organización y distribución de material (20 minutos).
- Axiomas y postulados de la Geometría del papel, establecimiento de la equivalencia de las herramientas euclidianas (regla y compás) con el doblado de papel (20 minutos).
- Rectas y ángulos (20 minutos).
- Triángulos y cuadriláteros (45 minutos).
- Polígonos (60 minutos).
- Círculo (45 minutos)
- Evaluación y conclusiones (30 minutos).

## **PRODUCTOS.**

Cada equipo formado presentará la demostración formal de al menos 3 de 5 proposiciones propuestas.

## **MATERIALES.**

Hojas y círculos de papel encerado delgado, alfileres con cabeza de plástico (provisto por el tallerista).

## **REQUERIMIENTOS TÉCNICOS.**

Aula con proyector multimedia.